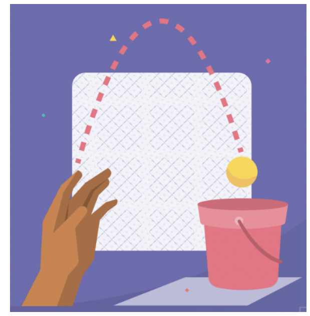
Amplify Math

Unit 5 Caregiver Support

Unit Overview + Narrative Connections

In this unit, students study quadratic functions by analyzing and comparing tables, graphs, and equations. They examine squares in motion - applying their understanding to contexts such as free fall, projectile motion, and revenue.

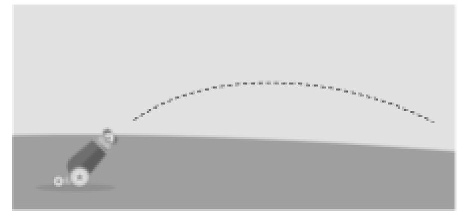


Prior Learning	Current Learning	Future Learning
• Linear functions • Absolute value, piecewise, and step functions • Graphs of functions • Exponential functions	• Tables, graphs, and equations of quadratic functions	• Quadratic Equations

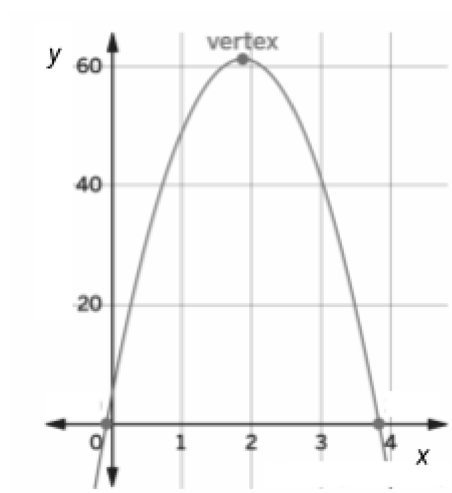
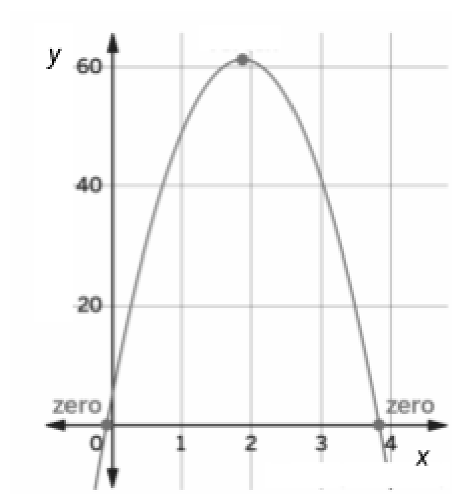
Key Ideas

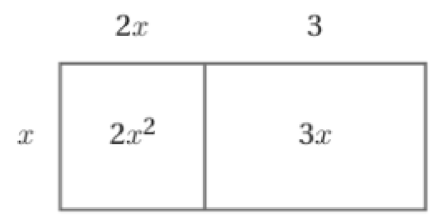
- *Quadratic expressions* and *quadratic functions* are related to squares.
- Quadratics can model free-falling objects, projectile motion and revenue.
- *Area diagrams* provide a visual model to make sense of the *factored forms* and *standard forms* of quadratic expressions.
- The structure of a quadratic equation can provide key information about the graph of the equation.
- Quadratic expressions and equations can be expressed in *vertex form*.

Vocabulary

<table>
<tr><td>projectile</td><td>An object launched into the air or space and affected by gravity.</td><td></td></tr>
<tr><td>quadratic</td><td>The change in a pattern that grows by raising a number or term to the second power, or squaring it.</td><td>1, 4, 9, 16, 25, . . .</td></tr>
<tr><td>quadratic expression</td><td>A squared variable, by itself or in an expression.</td><td>n^2

$n^2 + 5n$</td></tr>
<tr><td>quadratic function</td><td>A function where the output is given by a quadratic expression.</td><td>$f(n) = n(n+5)$

$f(n) = n^2 + 5n$</td></tr>
<tr><td>vertex</td><td>The vertex of the graph of a quadratic function is the point where the graph changes from increasing to decreasing or vice versa. It is the highest or lowest point on the graph.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>zero</td><td>The value at which the function is zero.</td><td>
</td></tr>
</table>

area diagram	A tool used to visualize the Distributive Property when writing expressions.	 $x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$
factored form (of a quadratic expression)	A quadratic expression that is written as the product of a constant times two linear factors is said to be in factored form.	factored form $(x-3)(x+1)$
standard form (of a quadratic expression)	The standard form of a quadratic expression in x is ax^2+bx+c, where a, b, and c are constants, and a is not 0.	standard form x^2-2x-3
vertex form	An equation of the form $y = a(x-h)^2 + k$ where (h, k) represents the coordinate of the vertex of a quadratic equation.	vertex form $(x-1)^2-4$

Example Problems + Discussion Prompts

Sub-Unit 1

<table>
<tr><th>Problem</th><th>Sample Solution</th></tr>
<tr><td>

Lesson 2

A flower garden has a perimeter of 48 ft.
Some of the possible measurements are shown in the table.

Length (ft)	Width (ft)	Area (ft^2)
6	18	108
8	16	
10		140
12		
14		
		128

a. Complete the missing measurements in the table.

b. What length and width of the garden produces the maximum area? What is the shape of the garden?

c. Is the relationship between the length and the area linear, exponential, or neither?

</td><td>

a. To calculate the area, multiply the length times the width. To calculate the width, divide the area by the length. There is a pattern in the table that can be used as well, the length is increasing by 2 ft and the width is decreasing by 2 ft.

Length (ft)	Width (ft)	Area (ft^2)
6	18	108
8	16	**128**
10	**14**	140
12	**12**	**144**
14	**10**	**140**
16	**8**	128

b. Using the pattern of the table, the largest area is 144 ft^2, when the length and the width are both 12 ft. When the length and width of a rectangle are the same, it is a square.

When the length and width are each 12 ft, it forms a square, producing the maximum area.

c. The length is increasing by 2 ft, but the area does not increase by an equal amount, so it cannot be linear. Also, the area does not increase by an equal factor, so it is not exponential.

Neither.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Discuss this question with your student:

- Will a square always produce the maximum area for a rectangle with a fixed perimeter? Why or why not?

</td></tr>
</table>

Sub-Unit 2

<table>
<tr><th>Problem</th><th>Sample Solution</th></tr>
<tr><td>

Lesson 8

The height, in meters, of a diver above the water is given by the function $h(t) = -5t^2 + 10t + 3$, where time *t* is time measured in seconds. Select *all* statements that are true.

A. The graph that represents h(t) starts at the origin and curves upward.
B. The diver begins at the same height as the water level.
C. The function has one zero that makes sense in this situation.
D. The function has two zeros that make sense in this situation.
E. The diver begins 3 m above the water.
F. The diver begins 5 m above the water.

</td><td>

The statement in A is not correct because the leading coefficient of the equation is -5, indicating the graph curves down.

The statement in B is not correct because the constant term of the equation is 3, indicating the y-intercept of the graph is 3.

The statement in C is correct and the statement in D is not correct because one of the zeros of the function will be negative, and time cannot be negative so only one zero will make sense in this situation.

The statement in E is correct and the statement in F is not correct because the constant term of the equation is 3, indicating the y-intercept of the graph is 3. In this situation, that means the diver will begin 3 m above the water.

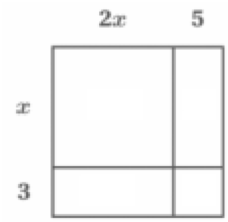
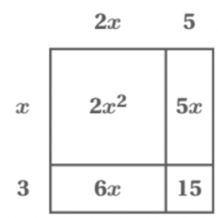
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Discuss this question with your student:

- What will the vertex represent in this situation?

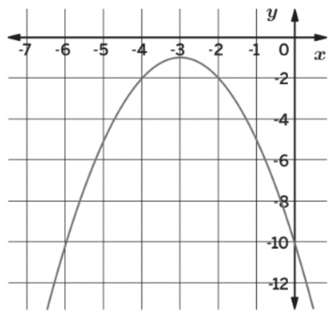
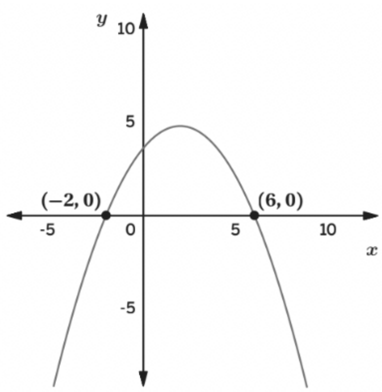
</td></tr>
</table>

Sub-Unit 3

Problem	Sample Solution
Lesson 11 Sketch a model to show that the expression (2x+5)(x+3) is equivalent to the expression $2x^2$+11x+15.	First, draw an area diagram and write each linear factor as the side lengths.  Next, multiply the side lengths to determine the area of each square and rectangle.  **The area diagram reveals that (2x+5)(x+3) is equivalent to $2x^2$+6x+5x+15 which simplifies to $2x^2$+11x+15.**
Discuss these questions with your student: ● When would you prefer to use an area diagram to expand expressions such as (2x+5)(x+3) rather than the Distributive Property? When would you prefer to use the Distributive Property rather than an area diagram?	
Lesson 13 Consider the quadratic function f(x) = (x − 7)(x + 3). a. Without graphing, identify the x-intercepts of the function's graph. b. Expand (x − 7)(x + 3) and use the expanded form to identify the y-intercept of the graph of the function.	a. The x-intercepts of the function's graph are when the function value is equal to 0. When x = 7, the value of the function is (7 - 7)(7 + 3), which equals 0 · 10, or 0. When x = -3, the value of the function is (-3 - 7)(-3 + 3), which equals -10 · 0, or 0. **(7, 0) and (-3, 0)** b. Using the Distributive Property and combining like terms, (x − 7)(x + 3) is equivalent to x^2-4x-21.

<table>
<tr><td></td><td>$(x-7)(x+3)$
$x^2+3x-7x-21$
$x^2-4x-21$
When x=0, the function is $(0)^2-4(0)-21$, or -21. The y-intercept of the graph of the function is -21.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Discussion questions for you and your student:
● When a quadratic function is written in factored form, what information can you determine about the graph of the function? Why?
● When a quadratic function is written in standard form, what information can you determine about the graph of the function? Why?</td></tr>
</table>

Sub-Unit 4

Problem	Sample Solution
Lesson 19 Which equation is represented by the graph?  A. $y = (x - 1)^2 + 3$ B. $y = (x - 3)^2 + 1$ C. $y = -(x + 3)^2 - 1$ D. $y = -(x - 3)^2 + 1$	The vertex form a quadratic function, $a(x-h)^2+k$ reveals the vertex, (h, k), of the graph of the function. The answer is not A or B because the graph is facing downward and the graphs of the equations in A and B will face upward because the leading coefficient, a, is positive. **The answer is C** because the graph is facing downward and has a vertex of (-3, -1). The answer is not D because the graph of this equation will have a vertex of (3, 1).
Discuss this question with your student: ● When a quadratic function is written in vertex form, what information can you determine about the graph of the function? Why?	
Lesson 21 The graph of g(x) is given. Which form of a quadratic function would you use to write this function?  	There are three forms for a quadratic function, standard form, ax^2+bx+c, factored form, $a(x - p)(x - q)$, and vertex form, $a(x-h)^2+k$. If you can identify the vertex from the graph, you may want to write the function in vertex form. However if you can identify the x-intercepts from the graph, you may want to write the function in factored form with an unknown coefficient. In this graph, the x-intercepts are shown, so the **factored form would be best** if the factors can be determined from the x-intercepts. The x-intercept (-2, 0) corresponds to the factor (x+2) and the x-intercept (6, 0) corresponds to the factor (x-6). This function could be written as g(x)=a(x+2)(x-6), where a is a negative constant because the graph is facing downward.
Discuss this question with your student: ● Given a graph of a quadratic function, how could you determine the best form to write the equation? Why?	

Sample Answers to Discussion Questions

Answers may vary.

- Will a square always produce the maximum area for a rectangle with a fixed perimeter? Why or why not?
  - *Yes, the relationship between the side length and the area is not linear. The area increases up until a certain length and then the area decreases as the length continues to increase. The maximum area will occur when the length and the width are the same, thus producing a square.*

- What will the vertex represent in this situation?
  - *The vertex represents the maximum height of the diver above the water after t seconds.*

- When would you prefer to use an area diagram to expand expressions such as (2x+5)(x+3) rather than the Distributive Property? When would you prefer to use the Distributive Property rather than an area diagram?
  - *The area diagrams can help keep track of the different parts of the factors that need to be multiplied. Drawing area diagrams can be time-consuming while using the Distributive Property can be quicker.*

- When a quadratic function is written in factored form, what information can you determine about the graph of the function? Why?
  - *When a quadratic function is expressed in factored form, the x-intercepts of the graph can be identified from the zeros. The x-intercepts are the input values when the output of the function is 0.*

- When a quadratic function is written in standard form, what information can you determine about the graph of the function? Why?
  - *When a quadratic function is expressed in standard form, it provides the y-intercept of the graph representing the function. The y-intercept is the constant value c from the form* ax^2+bx+c.

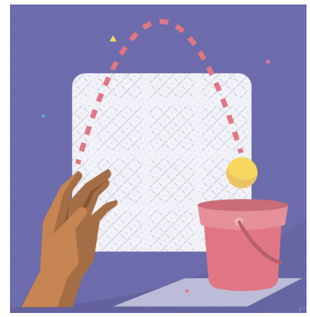
- When a quadratic function is written in vertex form, what information can you determine about the graph of the function? Why?
  - *When a quadratic function is expressed in vertex form, it provides the vertex of the graph representing the function. The vertex is (h, k) from the form* $a(x-h)^2+k$.

- Given a graph of a quadratic function, how could you determine the best form to write the equation? Why?
  - *If the vertex can be identified from the graph, the vertex form might be the best form to write the equation. If the x-intercepts can be identified from the graph, the factored form might be the best form to write the equation. The standard form is not usually the best form to write an equation given a graph.*

Apoyo para cuidadores/as, Unidad 5

Vista general de la unidad + Conexiones narrativas

En esta unidad, los/as estudiantes estudian las funciones cuadráticas analizando y comparando tablas, gráficas y ecuaciones. Examinan los cuadrados en movimiento, aplicando su comprensión a contextos como la caída libre, el movimiento de proyectiles y los ingresos.

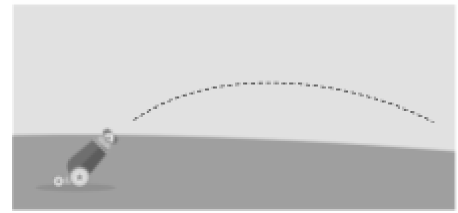


Aprendizaje previo	Aprendizaje actual	Aprendizaje futuro
• Funciones lineales • Funciones de valor absoluto, definidas a trozos y escalonadas • Gráficas de funciones • Funciones exponenciales	• Tablas, gráficas y ecuaciones de funciones cuadráticas	• Funciones cuadráticas

Ideas clave

- *Las expresiones cuadráticas* y *las funciones cuadráticas* están relacionadas con los cuadrados.
- Los cuadráticos pueden modelar objetos en caída libre, movimiento de proyectiles e ingresos.
- *Los diagramas de área* proporcionan un modelo visual para dar sentido a las *formas factorizadas* y a las *formas estándar* de las *expresiones cuadráticas*.
- La estructura de una ecuación cuadrática puede proporcionar información clave sobre la gráfica de la ecuación.
- Las expresiones y ecuaciones cuadráticas pueden expresarse en *forma de vértice*.

Vocabulario

<table>
<tr><td>proyectil</td><td>Un objeto lanzado al aire o al espacio y afectado por la gravedad.</td><td></td></tr>
<tr><td>cuadrática</td><td>El cambio en un patrón que crece al elevar un número o término a la segunda potencia, o al cuadrado.</td><td>1, 4, 9, 16, 25, . . .</td></tr>
<tr><td>expresión cuadrática</td><td>Una variable al cuadrado, por sí misma o en una expresión.</td><td>n^2

$n^2 + 5n$</td></tr>
<tr><td>función cuadrática</td><td>Función en la cual la salida está dada por una expresión cuadrática.</td><td>$f(n) = n(n+5)$

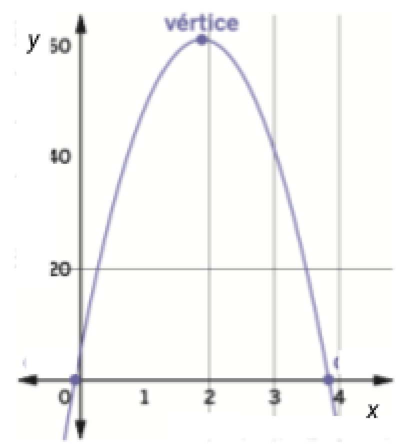
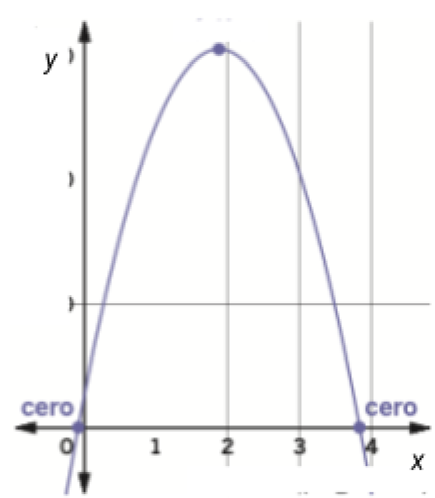
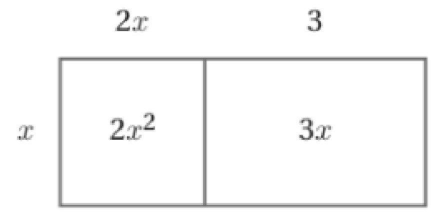
$f(n) = n^2 + 5n$</td></tr>
<tr><td>vértice</td><td>El vértice de la gráfica de una función cuadrática es el punto en que la tendencia de la gráfica cambia de aumentar a disminuir o viceversa. Es el punto más alto o más bajo de la gráfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>cero</td><td>Valores para los cuales la función es cero.</td><td>
</td></tr>
</table>

diagrama de áreas	Una herramienta utilizada para visualizar la propiedad distributiva al escribir expresiones.	 $x(2x+3)=2x^2+3x$
forma factorizada (de una expresión cuadrática)	Una expresión cuadrática escrita como el producto de una constante multiplicada por dos factores lineales se considera estar en forma factorizada.	forma factorizada $(x-3)(x+1)$
forma estándar (de una expresión cuadrática)	La forma estándar de una expresión cuadrática en x es ax^2+bx+c, en la cual a, b y c son constantes, y a no es 0.	forma estándar x^2-2x-3
forma de vértice	Ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$, en la cual (h, k) provee la coordenada del vértice de una ecuación cuadrática.	forma de vértice $(x-1)^2-4$

Problemas de ejemplo + Temas de discusión

<u>Subunidad 1</u>

Problema

Lección 2

Un jardín de flores tiene un perímetro de 48 pies.
Algunas de las posibles medidas se muestran en la tabla.

Longitud (pies)	Ancho (pies)	Área (pies^2)
6	18	108
8	16	
10		140
12		
14		
		128

a. Completa las medidas que faltan en la tabla.

b. ¿Qué longitud y ancho del jardín produce el área máxima? ¿Cuál es la forma del jardín?

c. ¿La relación entre la longitud y el área es lineal, exponencial o ninguna?

Solución de ejemplo

a. Para calcular el área, multiplica la longitud por el ancho. Para calcular el ancho, divide el área por la longitud. Hay un patrón en la tabla que se puede utilizar también, la longitud aumenta en 2 pies y el ancho disminuye en 2 pies.

Length (ft)	Width (ft)	Area (ft^2)
6	18	108
8	16	**128**
10	**14**	140
12	**12**	**144**
14	**10**	**140**
16	**8**	128

b. Utilizando el patrón de la tabla, el área mayor es de 144 ft^2, cuando la longitud y el ancho son ambas de 12 pies. Cuando la longitud y el ancho de un rectángulo son iguales, es un cuadrado.

Cuando la longitud y el ancho son cada uno de 12 pies, se forma un cuadrado, produciendo el área máxima.

c. La longitud aumenta en 2 pies, pero el área no aumenta en la misma cantidad, por lo que no puede ser lineal. Además, el área no aumenta en un factor igual, por lo que no es exponencial.

Ninguna.

Comente esta pregunta con su estudiante:

- ¿Un cuadrado producirá siempre el área máxima de un rectángulo con un perímetro fijo? ¿Por qué sí o por qué no?

Subunidad 2

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Solución de ejemplo</th></tr>
<tr><td>Lección 8
La altura, en metros, de una clavadista sobre el agua está dada por la función $h(t) = -5t^2 + 10t + 3$, donde el tiempo t es el tiempo medido en segundos. Selecciona todas las afirmaciones que sean verdaderas.

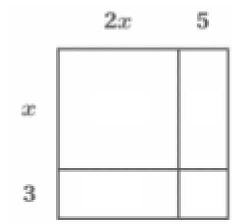
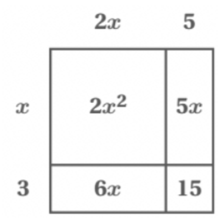
A. La gráfica que representa h(t) comienza en el origen y se curva hacia arriba.
B. La clavadista empieza a la misma altura que el nivel del agua.
C. La función tiene un cero que tiene sentido en esta situación.
D. La función tiene dos ceros que tienen sentido en esta situación.
E. La clavadista empieza a 3 m sobre el agua.
F. La clavadista empieza a 5 m sobre el agua.</td><td>La afirmación de A no es correcta porque el coeficiente principal de la ecuación es -5, lo que indica que la gráfica se curva hacia abajo.

La afirmación en B no es correcta porque el término constante de la ecuación es 3, lo que indica que la intersección y de la gráfica es 3.

La afirmación en C es correcta y la afirmación en D no es correcta porque uno de los ceros de la función será negativo, y el tiempo no puede ser negativo por lo que sólo un cero tendrá sentido en esta situación.

La afirmación en E es correcta y la afirmación en F no es correcta porque el término constante de la ecuación es 3, lo que indica que la intersección y de la gráfica es 3. En esta situación, eso significa que el clavadista comenzará a 3 m por encima del agua.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comente esta pregunta con su estudiante:
● ¿Qué representará el vértice en esta situación?</td></tr>
</table>

Subunidad 3

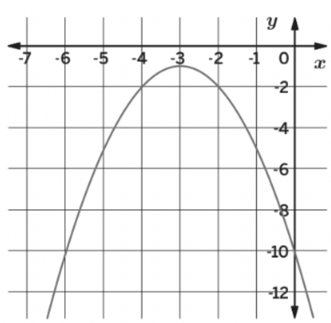
Problema	Solución de ejemplo
Lección 11 Boceta un modelo para mostrar que la expresión (2x + 5)(x + 3) es equivalente a la expresión $2x^2+11x+15$.	Primero, dibuja un diagrama de áreas y escribe cada factor lineal como las longitudes de los lados.  A continuación, multiplica las longitudes de los lados para determinar el área de cada cuadrado y rectángulo  **El diagrama de áreas revela que (2x+5)(x+3) es equivalente a $2x^2+6x+5x+15$ que se simplifica a $2x^2+11x+15$.**
Comente esta pregunta con su estudiante: ● ¿Cuándo preferirías utilizar un diagrama de áreas para expandir expresiones como (2x+5)(x+3) en lugar de la propiedad distributiva? ¿Cuándo preferirías utilizar la propiedad distributiva en lugar de un diagrama de áreas?	
Lección 13 Considera la función cuadrática f(x) = (x − 7)(x + 3). a. Sin graficar, identifica las intersecciones en x de la gráfica de la función. b. Expande (x − 7)(x + 3) y usa la forma expandida para identificar la intersección en y de la gráfica de la función.	a. Las intersecciones en x de la gráfica de la función son cuando el valor de la función es igual a 0. Cuando x = 7, el valor de la función es (7 - 7)(7 + 3), que es igual a 0 - 10, o 0. Cuando x = -3, el valor de la función es (-3 - 7)(-3 + 3), que es igual a -10 - 0, o sea 0. **(7, 0) y (-3, 0)**

	b. Utilizar la propiedad distributiva y combinar términos similares, (x − 7)(x + 3) es equivalente a x^2-4x-21. $(x-7)(x+3)$ $x^2+3x-7x-21$ $x^2-4x-21$ Cuando x=0, la función es $(0)^2$-4(0)-21, o -21. **La intersección y de la gráfica de la función es -21.**

Comente estas preguntas con su estudiante:

- Cuando una función cuadrática se escribe en forma factorizada, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?
- Cuando una función cuadrática se escribe en forma estándar, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?

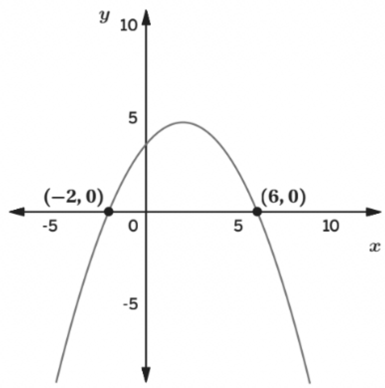
<u>Subunidad 4</u>

Problema	Solución de ejemplo
Lección 19 ¿Qué ecuación está representada por la gráfica?  A. $y = (x - 1)^2 + 3$ B. $y = (x - 3)^2 + 1$ C. $y = -(x + 3)^2 - 1$ D. $y = -(x - 3)^2 + 1$	La forma del vértice de una función cuadrática, $a(x-h)^2+k$ revela el vértice, (h, k), de la gráfica de la función. La respuesta no es A ni B porque la gráfica está orientada hacia abajo y las gráficas de las ecuaciones en A y B estarán orientadas hacia arriba porque el coeficiente principal, a, es positivo. **La respuesta es C** porque la gráfica está orientada hacia abajo y tiene como vértice (-3, -1). La respuesta no es D porque la gráfica de esta ecuación tendrá un vértice de (3, 1).

Comente esta pregunta con su estudiante:

- Cuando una función cuadrática se escribe en forma de vértice, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?

<table>
<tr>
<td>Lección 21
La gráfica de g(x) está dada.

¿Qué forma de función cuadrática usarías para escribir esta función?

</td>
<td>Hay tres formas para una función cuadrática, la forma estándar, ax^2+bx+c, la forma factorizada $a(x - p)(x - q)$, y la forma de vértice, $a(x-h)^2+k$.

Si puede identificar el vértice a partir de la gráfica, puede escribir la función en forma de vértice. Sin embargo, si puede identificar las intersecciones de las de la gráfica, es posible que quiera escribir la función en forma factorizada con un coeficiente desconocido.

En esta gráfica, se muestran las intersecciones de la x, por lo que la forma factorizada sería la mejor si los factores se pueden determinar a partir de las intersecciones de la x. La intersección x (-2, 0) corresponde al factor (x+2) y la intersección x (6, 0) corresponde al factor (x-6). Esta función podría escribirse como g(x)=a(x+2)(x-6), donde a es una constante negativa porque la gráfica está orientada hacia abajo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Comente esta pregunta con su estudiante:
● Dada una gráfica de una función cuadrática, ¿cómo podrías determinar la mejor forma de escribir la ecuación? ¿Por qué?</td>
</tr>
</table>

Respuestas de ejemplo a las preguntas de discusión

Puede haber varias respuestas.

- ¿Un cuadrado producirá siempre el área máxima de un rectángulo con un perímetro fijo? ¿Por qué sí o por qué no?
    - *Sí, la relación entre la longitud del lado y el área no es lineal. El área aumenta hasta una determinada longitud y luego el área disminuye a medida que la longitud sigue aumentando. El área máxima se producirá cuando la longitud y el ancho sean iguales, produciendo así un cuadrado.*

- ¿Qué representará el vértice en esta situación?
    - *El vértice representa la altura máxima del clavadista sobre el agua después de t segundos.*

- ¿Cuándo preferirías utilizar un diagrama de áreas para expandir expresiones como (2x+5)(x+3) en lugar de la propiedad distributiva? ¿Cuándo preferirías utilizar la propiedad distributiva en lugar de un diagrama de áreas?
    - *Los diagramas de área pueden ayudar a llevar la cuenta de las diferentes partes de los factores que hay que multiplicar. Dibujar diagramas de área puede llevar mucho tiempo, mientras que utilizar la propiedad distributiva puede ser más rápido.*

- Cuando una función cuadrática se escribe en forma factorizada, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?
    - *Cuando una función cuadrática se expresa en forma factorizada, las intersecciones en x de la gráfica pueden identificarse a partir de los ceros. Las intersecciones en x son los valores de entrada cuando la salida de la función es 0.*

- Cuando una función cuadrática se escribe en forma estándar, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?
    - *Cuando una función cuadrática se expresa en forma estándar, proporciona la intersección y de la gráfica que representa la función. La intersección y es el valor constante c de la forma* ax^2+bx+c.

- Cuando una función cuadrática se escribe en forma de vértice, ¿qué información puedes determinar sobre la gráfica de la función? ¿Por qué?
    - *Cuando una función cuadrática se expresa en forma de vértice, proporciona el vértice de la gráfica que representa la función. El vértice es (h, k) de la forma* $a(x-h)^2+k$.

- Dada una gráfica de una función cuadrática, ¿cómo podrías determinar la mejor forma de escribir la ecuación? ¿Por qué?
    - *Si el vértice se puede identificar a partir de la gráfica, la forma de vértice podría ser la mejor forma de escribir la ecuación. Si se pueden identificar las intersecciones x a partir de la gráfica, la forma*

factorizada puede ser la mejor forma de escribir la ecuación. La forma estándar no suele ser la mejor forma de escribir una ecuación dada una gráfica.