Grade 8, Unit 2 — Dilations and Similarity

Unit 2 Caregiver Support

Unit Overview + Narrative Connections

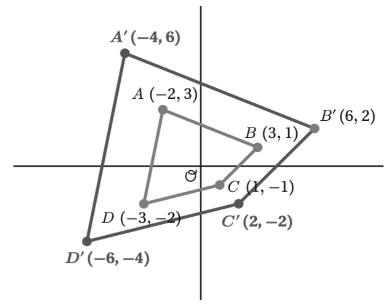
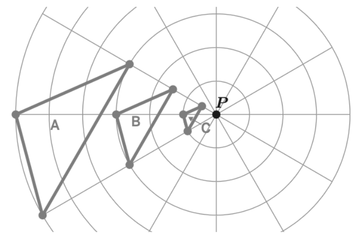
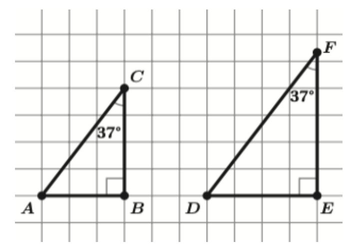
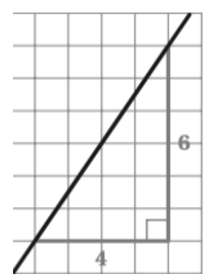
In this unit students will explore dilations and similar figures, like triangles, that will prepare them for deeper learning about slope in the future. They will answer the question: "Would you put poison in your eye?", ss they learn about dilating circles just like an optometrist dilates your pupil. They will explore the newly discovered "shrinkflation" that comes when companies sell similar, dilated, sized products for the same price as a larger product.

Prior Learning	Current Learning	Future Learning
• Rigid transformations on the coordinate plane • Finding the sum of the interior angles of a triangle (180°)	• Properties of dilations • Identify scale factor • Define similar figures	• Slope of a line • Proportional and nonproportional Relationships • Systems of linear relationships

Key Ideas

- A dilation can be used to create or identify similar figures.
- Dilations use scale factor to determine how much larger or smaller to make the similar figure.
- Two congruent figures are always similar, but two similar figures are not necessarily congruent.
- The same ratio of side lengths is preserved in similar figures. Corresponding angle measures are equal in similar figures.

Vocabulary

dilation	A transformation using a scale factor in which each point on a figure moves along a ray and changes its distance from a fixed point	
center of dilation	The fixed point from which the points on a figure are moved to perform a dilation	
similar	Two figures are similar if one figure can be mapped onto the other by a sequence of translations, rotations, reflections, or dilations.	
slope	The ratio of the length of the vertical side and the horizontal side of a right triangle	 The slope of this line is $\frac{6}{4}$ or $\frac{3}{2}$
slope triangles	The right triangle, where the slanted line is opposite the right angle, that is used to find the slope (see image for *slope*)	

Example Problems + Discussion Prompts

Sub-Unit 1

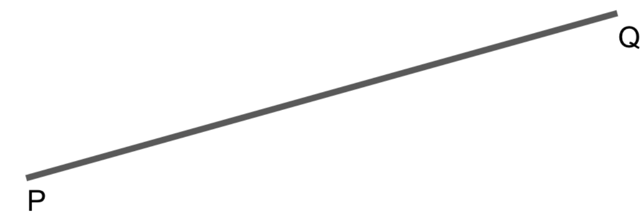
<table>
<tr><th>Problem</th><th>Sample Solution</th></tr>
<tr><td>

Lesson 3

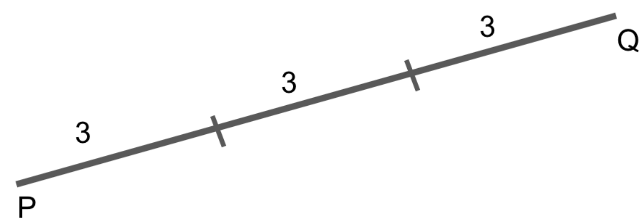
Segment PQ is 9 units in length. What is the length, in units, of PQ after a dilation using a scale factor of ⅔ ?

</td><td>

1) Draw a line and label it PQ.



2) Divide your line into 3 equal parts.



3) Add two of the parts together:
   3+3=6

Another Solution:

1) Multiply the length of the segment PQ by ⅔:

$$9 \bullet \frac{2}{3} = 6$$

The length of PQ after a dilation of ⅔ is 6 units.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

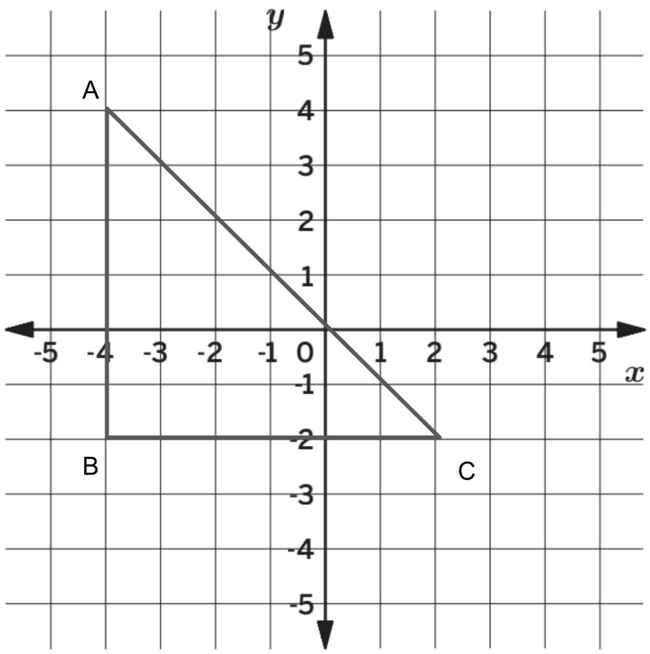
Discuss this question with your student:

- How would the answer change if it was dilated by a scale factor of 3? What about ⅓ ?

</td></tr>
</table>

Lesson 5

Triangle ABC has vertices located at A(-4,4), B(-4,-2), and C(2,-2). Triangle A’B’C’ is the result of dilating Triangle ABC using the origin as the center of dilation and a scale factor of ½ . Complete the table by finding the coordinates of Triangle A’B’C’.



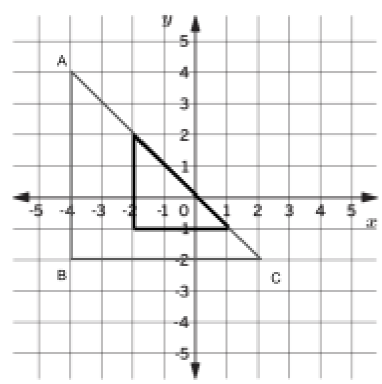
Preimage Coordinates		Image Coordinates	
Point *A*	*A (-4,4)*	Point *A’*	
Point *B*	*B (-4,-2)*	Point *B’*	
Point *C*	*C* (2,-2)	Point *C’*	

1) Divide the coordinates of point *A* by 2 (finding the ½ dilation):
   -4 ÷ 2 = -2
   4 ÷ 2 = 2
   The coordinates for *A’* are **(-2,2)**

2) Divide the coordinates of point *B* by 2 (finding the ½ dilation):
   -4 ÷ 2 = -2
   -2 ÷ 2 = -1
   The coordinates for *b’* are **(-2,-1)**

3) Divide the coordinates of point *C* by 2 (finding the ½ dilation):
   2 ÷ 2 = 1
   -2 ÷ 2 = -1
   The coordinates for *b’* are **(1,-1)**

Image Coordinates	
Point *A’*	**(-2,2)**
Point *B’*	**(-2,-1)**
Point *C’*	**(1,-1)**



Discuss these questions with your student:

- If the center of dilation was not the origin would I still be able to divide the coordinates in half?
- Can a dilated shape move on the coordinate plane? Or will it always land “on” the preimage?

Sub-Unit 2

Problem	Sample Solution
Lesson 8 Determine whether triangle *R* is similar to triangle *M* based on the angle measures given: Triangle *R*: 40°, 80° Triangle *M*: 60°, 80°	For two triangles to be similar they have to have the same three angle measures. To figure this out we need to find the missing third angle measurement for each triangle. *Reminder: the sum of all the angles of a triangle is 180° 1) Add the measures for Triangle *R:* 40° + 80° = 120° 2) Subtract that sum from 180° to find the missing angle measure for Triangle *R:* 180° - 120° = 60° Repeat steps 1 and 2 for Triangle *M* 1) 60° + 80° = 140° 2) 180° - 140° = 40° Compare the angle measures for each triangle: Triangle *R*: 40°, 80°, 60° Triangle *M*: 60°, 80°, 40° **Because both triangles have the same angle measures (in a different order) the triangles ARE similar.**

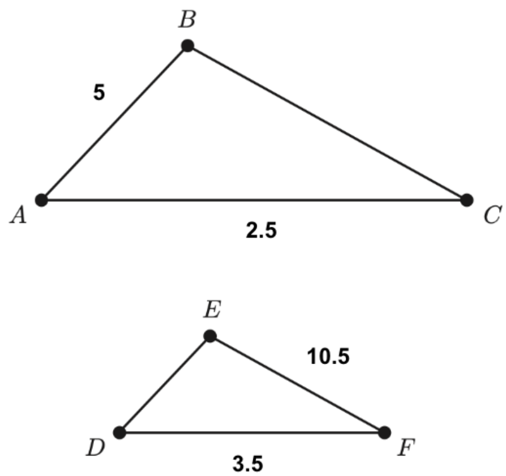
Discuss this question with your student:

- Are there other ways to determine if two triangles are similar? If so, what is one of them?

Lesson 9

ΔABC ~ ΔDEF

What is the length of segment *DE*?



To answer this question we need to create ratios (fractions) to relate adjacent (next to each other) sides on the corresponding triangles:

AB and *AC* correspond to *DE* and *DF*

$$\frac{5}{2.5} = \frac{DE}{3.5}$$

Since 2.5 (*AC*) is half of 5 (*AB*) we know that 3.5 (*DF*) must be half of *DE.*

3.5 • 2 = 7

Therefore, the length of segment *DE* is 7 units.

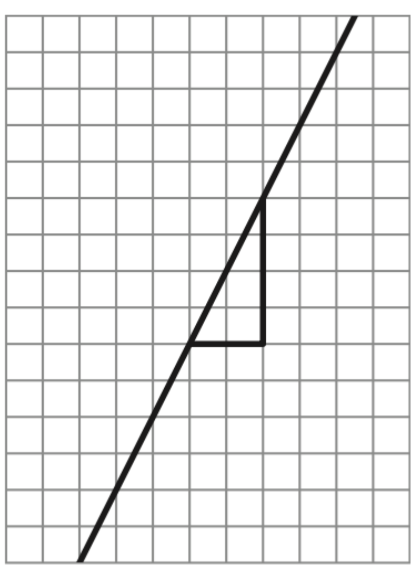
Discuss this question with your student:

- Would it make a difference if you set up the problem like this?

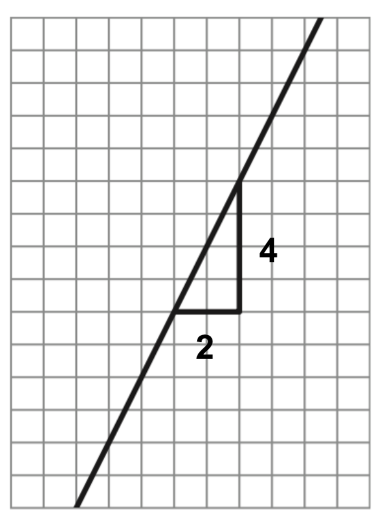
$$\frac{2.5}{5} = \frac{3.5}{DE}$$

Lesson 11

Use the Slope Triangle to find the slope of the line:



To answer this question we have the find the measurements of the vertical and horizontal sides of the triangle:



	The slope is the relationship (a fraction) between those to number: $\frac{4}{2} = 2$ **The slope is 2.**
Discuss this question with your student: ● Are you allowed to put the horizontal measurement as the numerator and the vertical measurement as the denominator?	

Sample Answers to Discussion Questions

Answers may vary.

- How would the answer change if it was dilated by a scale factor of 3? ⅓ ?
  - *If the scale factor was 3 I would multiply the length of the line segment by 3: 9 • 3 = 27, so the dilated segment would have a length of 9 units.*
  - *If the scale factor was 3 I would multiply the length of the line segment by ⅓ : 9 • ⅓ = 3, so the dilated segment would have a length of 3 units.*

- If the center of dilation was not the origin would I still be able to divide the coordinates in half?
  - *No, if the center of dilation was not the origin I would not know how to solve it. We have only studied when the center of dilation was the origin.*

- Can a dilated shape move on the coordinate plane? Or will it always land "on" the preimage?
  - *Yes! Sometimes the shape will be dilated by a very large number or a very small number and move to a totally different spot on the coordinate plane. Sometimes the image will overlap the preimage, but not always.*

- Are there other ways to determine if two triangles are similar? If so, what is one of them?
  - *You can also compare the side lengths. If the corresponding side lengths are proportional (meaning they can be simplified to make the same fraction) then the triangles are similar.*

- Would it make a difference if you set up the fraction like this?

$$\frac{2.5}{5} = \frac{3.5}{DE}$$

    - *No! As long as corresponding sides are in the same position (numerator or denominator of the fraction) then it will not matter which way you set it up.*

- Are you allowed to put the horizontal measurement as the numerator and the vertical measurement as the denominator?
    - *No, slope is always measured using the vertical measure of the slope triangle as the numerator and the horizontal measure of the slope triangle as the denominator.*

Amplify Math

Apoyo para cuidadores/as, Unidad 2

Vista general de la unidad + Conexiones narrativas

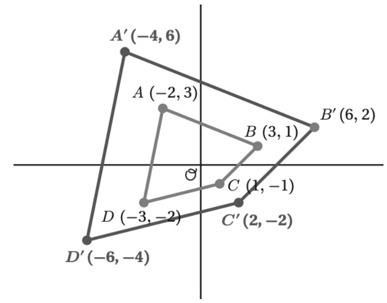
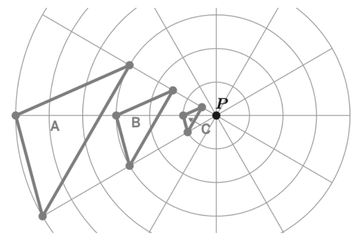
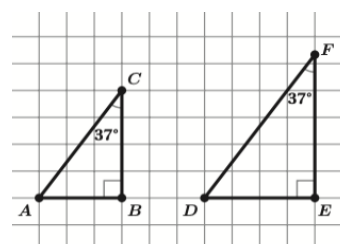
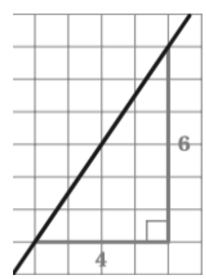
En esta unidad, los estudiantes explorarán las dilataciones y figuras similares, como los triángulos, que los va a preparar para un aprendizaje más profundo sobre las pendientes en el futuro. Van a responder la pregunta "¿Te pondrías veneno en el ojo?" mientras aprenden sobre dilatar círculos tal como lo hace un optometrista cuando dilata tu pupila. Van a explorar la recién descubierta "reduflación" que ocurre cuando las empresas venden productos similares, dilatados en tamaño, al mismo precio que un producto más grande.

Aprendizaje previo	Aprendizaje actual	Aprendizaje futuro
• Transformaciones rígidas en el plano coordenado • Encontrar la suma de los ángulos interiores de un triángulo (180°)	• Propiedades de las dilataciones • Identificar el factor de escala • Definir figuras similares	• Pendiente de una línea • Relaciones proporcionales y no proporcionales • Sistemas de relaciones lineales

Ideas clave

- Se puede usar una dilatación para crear o identificar figuras similares.
- Las dilataciones usan el factor de escala para determinar cuánto más grande o cuánto más pequeño hacer una figura similar.
- Dos figuras congruentes siempre son similares, pero dos figuras similares no son necesariamente congruentes.
- La misma proporción de longitudes de los lados se conserva en figuras similares. Las medidas de los ángulos correspondientes son iguales en figuras similares.

Vocabulario

<table>
<tr><td>dilatación</td><td>Una transformación que usa un factor de escala, en la que cada punto de una figura se mueve a lo largo de un rayo y cambia su distancia desde un punto fijo</td><td>
</td></tr>
<tr><td>centro de dilatación</td><td>El punto fijo desde el cual se mueven los puntos de una figura para realizar una dilatación.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>similar</td><td>Dos figuras son similares si una figura puede relacionarse con la otra mediante una secuencia de traslaciones, rotaciones, reflexiones o dilataciones.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>pendiente</td><td>Razón entre la longitud del lado vertical y el lado horizontal de un triángulo rectángulo.</td><td>

La pendiente de esta línea es $\frac{6}{4}$ o $\frac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td>triángulos de pendiente</td><td colspan="2">Un triángulo rectángulo cuyo lado inclinado está al lado opuesto del ángulo recto, que se usa para encontrar el pendiente (ver imágen para pendiente).</td></tr>
</table>

Problemas de ejemplo + Temas de discusión

<u>Subunidad 1</u>

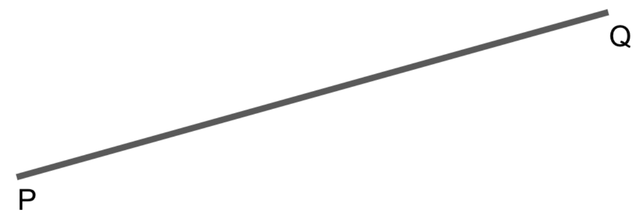
<table>
<tr><th>Problema</th><th>Solución de ejemplo</th></tr>
<tr><td>

Lección 3

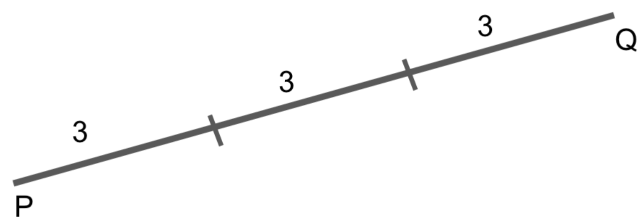
El segmento PQ tiene una longitud de 9 unidades. ¿Cuál es la longitud, en unidades, de PQ después de una dilatación utilizando un factor de escala de ⅔?

</td><td>

1) Dibuja una línea y etiquétala PQ.



2) Divide tu línea en 3 partes iguales.



3) Suma dos de las partes:
   3+3=6

Otra solución:

1) Multiplica la longitud del segmento PQ por ⅔:

$$9 \bullet \frac{2}{3} = 6$$

La longitud de PQ después de una dilatación de ⅔ es de 6 unidades.

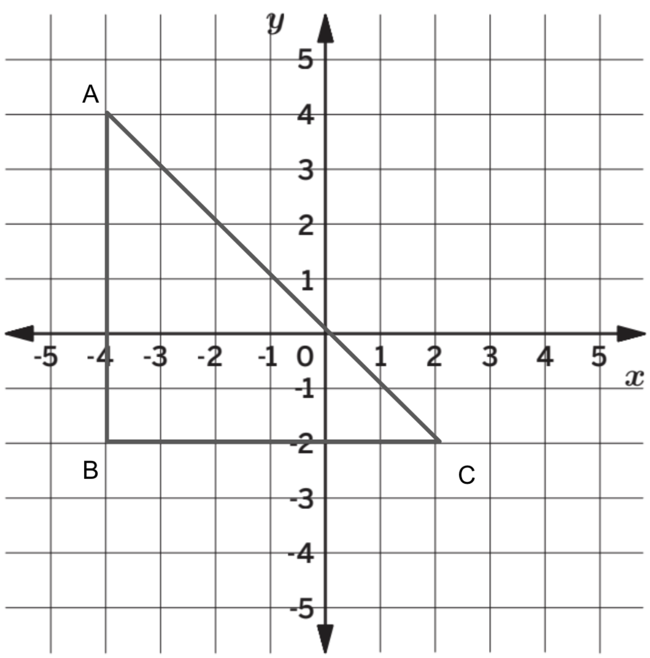
</td></tr>
</table>

Comente estas preguntas con su estudiante:

- ¿Cómo cambiaría la respuesta si fuera dilatada por un factor de escala de 3? ¿Y por ⅓ ?

Lección 5

El Triángulo ABC tiene vértices ubicados en A(-4,4), B(-4,-2), y C(2,-2). El Triángulo A′B′C′ es el resultado de dilatar el Triángulo ABC usando el origen como centro de dilatación y un factor de escala de ½ . Completa la tabla encontrando las coordenadas del Triángulo ABC.



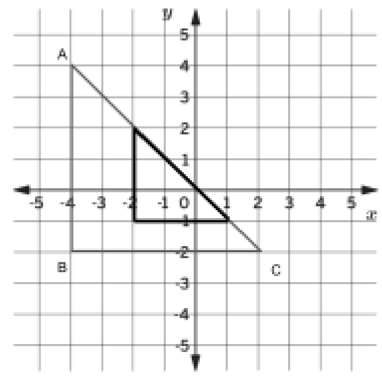
Coordenadas de la preimagen		Coordenadas de la imagen	
Punto *A*	*A (-4,4)*	Punto *A′*	
Punto *B*	*B (-4,-2)*	Punto *B′*	
Punto *C*	*C* (2,-2)	Punto *C′*	

1) Divide las coordenadas del punto *A* por 2 (encontrando la dilatación ½):
   -4 ÷ 2 = -2
   4 ÷ 2 = 2
   Las coordenadas para *A′* son **(-2,2)**.

2) Divide las coordenadas del punto *B* por 2 (encontrando la dilatación ½):
   -4 ÷ 2 = -2
   -2 ÷ 2 = -1
   Las coordenadas para *b′* son **(-2,-1)**.

3) Divide las coordenadas del punto *C* por 2 (encontrando la dilatación ½):
   2 ÷ 2 = 1
   -2 ÷ 2 = -1
   Las coordenadas para *c′* son **(1,-1)**.

Coordenadas de la imagen	
Punto *A′*	**(-2,2)**
Punto *B′*	**(-2,-1)**
Punto *C′*	**(1,-1)**

	
Comente estas preguntas con su estudiante: ● Si el centro de la dilatación no fuera el origen, ¿todavía podría dividir las coordenadas por la mitad? ● ¿Una forma dilatada puede moverse en el plano de coordenadas? ¿O siempre terminará “sobre” la preimagen?	

<u>Subunidad 2</u>

Problema	Solución de ejemplo
Lección 8 Determina si el triángulo *R* es similar al triángulo *M* en base a las medidas del ángulo dadas: Triángulo *R*: 40°, 80° Triaángulo *M*: 60°, 80°	Para que dos triángulos sean similares, deben tener las mismas medidas en los tres ángulos. Para averiguar esto, necesitamos encontrar la medida del tercer ángulo faltante para cada triángulo. *Recordatorio: la suma de todos los ángulos de un triángulo es 180° 1) Suma las medidas para el Triángulo *R:* 40° + 80° = 120° 2) Resta la suma de 180° para encontrar la medida del ángulo faltante para el Triángulo *R:* 180° - 120° = 60° Repite los pasos 1 y 2 para el Triángulo *M* 1) 60° + 80° = 140° 2) 180° - 140° = 40°

Compara las medidas del ángulo para cada triángulo:

Triángulo *R*: 40°, 80°, 60°
Triángulo *M*: 60°, 80°, 40°

Ya que ambos triángulos tienen las mismas medidas de ángulo (en un orden diferente), los triángulos SON similares.

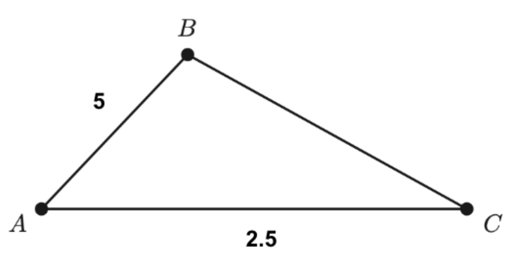
Comente estas preguntas con su estudiante:

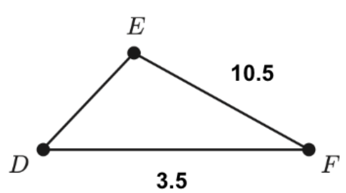
- ¿Hay otras maneras para determinar si dos triángulos son similares? Si es así, ¿cuál es una de ellas?

Lección 9

ΔABC ~ ΔDEF

¿Cuál es la longitud del segmento *DE*?





Para responder esta pregunta, necesitamos crear las razones (fracciones) para relacionar los lados adyacentes (uno al lado del otro) en los triángulos correspondientes:

AB y *AC* corresponden a *DE* y *DF*

$$\frac{5}{2.5} = \frac{DE}{3.5}$$

Dado que 2.5 (*AC*) es la mitad de 5 (*AB*), sabemos que 3.5 (*DF*) debe ser la mitad de *DE*.

3.5 • 2 = 7

Por lo tanto, la longitud del segmento *DE* es de 7 unidades.

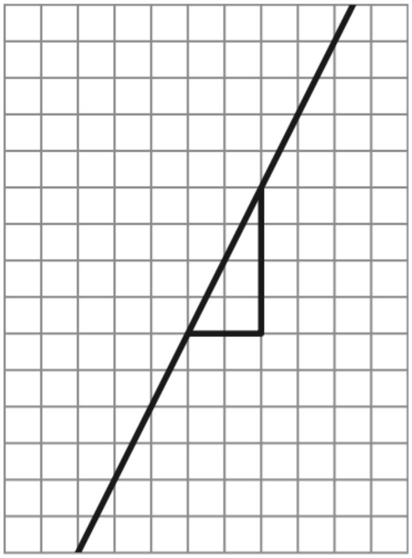
Comente estas preguntas con su estudiante:

- ¿Haría una diferencia si armaras el problema de esta manera?

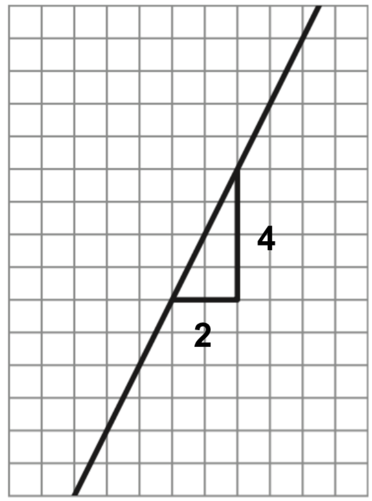
$$\frac{2.5}{5} = \frac{3.5}{DE}$$

Lección 11

Usa el Triángulo de pendiente para encontrar la pendiente de esta línea:



Para responder esta pregunta, tenemos que encontrar las medidas de los lados verticales y horizontales del triángulo:



La pendiente es la relación (una fracción) entre aquellos dos números.

$$\frac{4}{2} = 2$$

La pendiente es 2.

Comente estas preguntas con su estudiante:

- ¿Puedes poner la medida horizontal como el numerador y la medida vertical como el denominador?

Respuestas de ejemplo a las preguntas de discusión

Puede haber varias respuestas.

- ¿Cómo cambiaría la respuesta si fuera dilatada por un factor de escala de 3? ¿y por ⅓ ?
  - *Si el factor de escala fuera 3, multiplicaría la longitud del segmento de línea por 3: 9 • 3 = 27, entonces el segmento dilatado tendría una longitud de 9 unidades.*
  - *Si el factor de escala fuera 3, multiplicaría la longitud del segmento de línea por ⅓ : 9 • ⅓ = 3, entonces el segmento dilatado tendría una longitud de 3 unidades.*

- Si el centro de dilatación no fuera el origen, ¿todavía podría dividir las coordenadas por la mitad?
  - *No, si el centro de dilatación no fuera el origen, no sabrías cómo resolverlo. Hemos estudiado solamente cuando el centro de dilatación era el origen.*

- ¿Una forma dilatada puede moverse en el plano de coordenadas? ¿O siempre terminará "sobre" la preimagen?
  - *¡Sí! A veces la forma se dilatará en un número muy grande o en un número muy pequeño y se moverá a un punto totalmente diferente en el plano de coordenadas. A veces la imagen se superpondrá a la preimagen, pero no siempre.*

- ¿Hay otras maneras para determinar si dos triángulos son similares? Si es así, ¿cuál es una de ellas?
  - *También puedes comparar las longitudes de los lados. Si las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales (es decir, que se pueden simplificar para formar la misma fracción), entonces los triángulos son similares.*

- ¿Habría alguna diferencia si armaras la fracción de esta manera?

$$\frac{2.5}{5} = \frac{3.5}{DE}$$

  - *¡No! Mientras los lados correspondientes estén en la misma posición (numerador y denominador de la fracción) no importará en qué sentido la armes.*

- ¿Puedes poner la medida horizontal como el numerador y la medida vertical como el denominador?
  - No, la pendiente siempre se mide usando la medida vertical del triángulo de pendiente como numerador y la medida horizontal del triángulo de pendiente como denominador.