Unit 7 Caregiver Support

Unit Overview + Narrative Connections

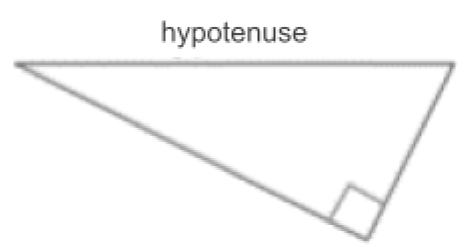
In this unit, students use their understanding of rational numbers, which can be expressed in the form of a ratio, to learn about and approximate irrational numbers. It may come as no surprise that beliefs were once challenged with the idea that not every number can be expressed as a ratio. Students explore a geometric proof of “the most proven theorem of all time”, the Pythagorean Theorem. This proof involves decomposing and rearranging two squares. Then they apply the Pythagorean Theorem to solve problems in two and three dimensions.

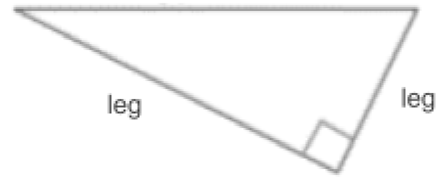
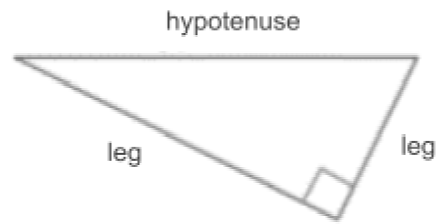
Prior Learning	Current Learning	Future Learning
• Squaring a number • Convert fractions to decimals using long division • Operations with rational numbers	• Estimate square roots and cube roots • Approximate irrational numbers • Understand and use the Pythagorean Theorem	• Exponents with fractions • Solve right triangles • Imaginary numbers

Key Ideas

- The side length of a square is the *square root* of its area; the side length of a cube is the *cube root* of its volume.
- All numbers that cannot be written as fractions (ratios of two integers) are irrational.
- *Rational numbers* can be used to approximate *irrational numbers*.
- The squared length of the *hypotenuse* of a right triangle is equal to the sum of the squared lengths of the two *legs*.
- If the lengths of two sides of a right triangle are known, the *Pythagorean Theorem* can be used to determine the length of the third side.

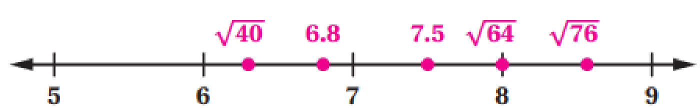
Vocabulary

perfect square	A number that is the square of an integer	Example: 16 is a perfect square because $16 = 4^2$.
square root	The square root of a positive number p is a positive solution to the equation of the form $x^2 = p$. The square root of p is written as $\sqrt{p}$	Example: $4^2 = 16$, so $\sqrt{16} = 4$.
cube root	The cube root of a positive number p is a positive solution to the equation of the form $x^3 = p$. The square root of p is written as $\sqrt[3]{p}$	Example: $2^3 = 8$, so $\sqrt[3]{8} = 2$.
perfect cube	A number that is the cube of an integer	Example: 8 is a perfect cube because $8 = 2^3$.
irrational number	A number that cannot be written as a fraction	Examples: $\sqrt{2}$ and π
rational number	A number that can be written as a positive or negative fraction	Examples: $-\frac{1}{2}$, 5, and $\sqrt{16}$
bar notation	Notation that indicates the repeated part of a repeating decimal	Example: $0.666666... = 0.\overline{6}$
repeating decimal	A decimal in which there is a sequence of digits that repeat indefinitely	Example: 0.81818181…
terminating decimal	A decimal that ends	Example: 1.25
hypotenuse	In a right triangle, the side opposite the right angle.	

legs	The two sides of a right triangle that form the right angle.	
Pythagorean Theorem	The theorem that states that for any right triangle, the sum of the square of the legs is equal to the square of the hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$, where a and b are the legs, and c is the hypotenuse.	 $\text{leg}^2 + \text{leg}^2 = \text{hypotenuse}^2$
Pythagorean Triple	Three positive integers a, b, and c, such that $a^2 + b^2 = c^2$.	Example: 3, 4, and 5 represents a Pythagorean triple since $3^2 + 4^2 = 5^{2+.}$

Example Problems + Discussion Prompts

<u>Sub-Unit 1</u>

Problem	Sample Solution
Lesson 4 Plot and label the approximate value of each number on the number line. $6.8 \quad \sqrt{76} \quad \sqrt{40} \quad \sqrt{64} \quad 7.5$ 	6.8 is slightly greater than 6.75, so it is just to the right of $6\frac{3}{4}$ on the number line. The irrational number $\sqrt{76}$ is between the rational numbers $\sqrt{64} = 8$ and $\sqrt{81} = 9$. Since $8.5^2 = 72.25$, $\sqrt{76}$ is just to the right of 8.5 on the number line. The irrational number $\sqrt{40}$ is between the rational numbers $\sqrt{36} = 6$ and $\sqrt{49} = 7$. Since $6.5^2 = 42.25$, 40 is just to the left of 6.5 on the number line. $\sqrt{64} = 8$, so $\sqrt{64}$ is a rational number and is located at 8 on the number line. 7.5 is halfway between 7 and 8 on the number line. 

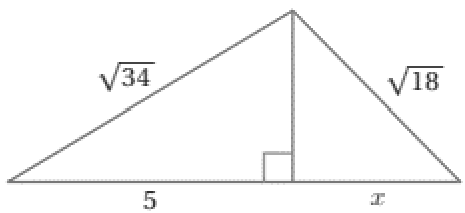
Discuss this question with your student:	
• Where is $\sqrt{24}$ located on a number line? How do you know?	
Lesson 6 Noah says that the solution to the equation $x^3 = 120$ is rational. Do you agree or disagree with Noah? Explain your thinking?	The number 120 is not a perfect cube, so there is no rational number that can be multiplied by itself three times to equal 120. **I disagree with Noah. The solution is $x = \sqrt[3]{120}$ and 120 is not a perfect cube, so the solution is an irrational number.**
Discuss this question with your student: • Explain where the solution to $x^3 = 120$ would lie on a number line.	
Lesson 8 Write 0.7 and $0.\overline{7}$ as fractions.	To write a terminating decimal as a fraction, use the number of digits to the right of the decimal point to determine the power of 10 in the denominator. There is one digit to the right of the decimal in 0.7 so the denominator of the fraction is $10^1 = 10$. The digits to the right of the decimal goes in the numerator. **0.7 =** $\frac{7}{10}$ To write a repeating decimal as a fraction, write the digit(s) in bar notation with repetition. $0.\overline{7}$ = 0.7777… Let x represent this number: x = 0.7777… Multiply both sides of the equation by a power of 10 such that the digits to the right of the decimal point are the same. $10x$ = 7.7777…. Subtract the two equations. $10x = 7.7777... \quad - x = 0.7777...$ ________________ $9x = 7$ Solve for x. $x = \frac{7}{9}$ $0.\overline{7} = \frac{7}{9}$
Discuss this question with your student: • How do you know which power of 10 to multiply by when converting a repeating decimal to a fraction? Use an example in the explanation.	

Sub-Unit 2

<table>
<tr><th>Problem</th><th>Sample Solution</th></tr>
<tr><td>

Lesson 11

Determine the value of x in the figure shown. Show your thinking.



</td><td>

The relationship among the sides of a right triangle is $a^2 + b^2 = c^2$, where a and b are the legs and c is the hypotenuse.

Using the right triangle on the left, let l represent the unlabeled leg, the other leg is 5, and the hypotenuse is $\sqrt{34}$.

$\boldsymbol{l^2 + 5^2 = (\sqrt{34})^2}$
$\boldsymbol{l^2 + 25 = 34}$
$\boldsymbol{l^2 = 9}$
$\boldsymbol{l = 3}$

Using the right triangle on the right, the unlabeled leg was found to be 3, the other leg is x, and the hypotenuse is $\sqrt{18}$.

$\boldsymbol{x^2 + 3^2 = (\sqrt{18})^2}$
$\boldsymbol{x^2 + 9 = 18}$
$\boldsymbol{x^2 = 9}$
$\boldsymbol{x = 3}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

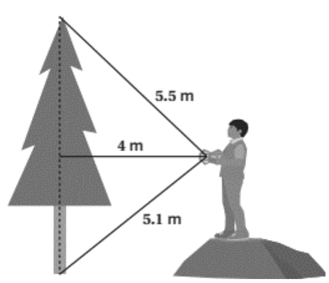
Discuss these questions with your student:

- How do you know which values to substitute into the Pythagorean relationship?
- Does the Pythagorean relationship work for all triangles?

</td></tr>
<tr><td>

Lesson 15

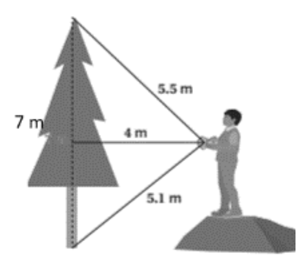
A laser range finder is a tool used to measure distances. By pointing the laser at an object, the tool can tell you the distance from the tool to the object along the line you are pointing. Han measures a tree from a hill. What is the height of the tree? Label the measurement on the diagram.



</td><td>

There are two right triangles in the diagram and two legs in the two triangles combine to make up the height of the tree. The lengths of these legs can be found using the Pythagorean Theorem. The relationship among the sides of each right triangle is $a^2 + b^2 = c^2$, where a and b are the legs and c is the hypotenuse.

Using the right triangle on the top, let x represent the unknown leg, the other leg is 4 m, and the hypotenuse is 5.5 m.



$4^2 + x^2 = 5.5^2$
$16 + x^2 = 30.25$
$x^2 = 14.25$
$x = \sqrt{14.25} \approx 3.8$

Using the right triangle on

</td></tr>
</table>

	the bottom, let x represent the unknown leg, the other leg is 4 m, and the hypotenuse is 5.1 m. $4^2 + x^2 = 5.1^2$ $16 + x^2 = 26.01$ $x^2 = 10.01$ $x = \sqrt{10.01} \approx 3.2$ The total is 3.8 + 3.2 = 7. **The height of the tree is about 7 m.**
Discuss this question with your student: ● What type of real-world problems can you solve using the Pythagorean Theorem?	

Sample Answers to Discussion Questions

Answers may vary.

- Where is $\sqrt{24}$ located on a number line? How do you know?
  - *The irrational number $\sqrt{24}$ is located just slightly to the left of 5 on the number line because 24 is just slightly less than 25 and $\sqrt{25}$ = 5.*

- Explain where the solution to $x^3 = 120$ would lie on a number line.
  - *The solution to $x^3 = 120$ is $x = \sqrt[3]{120}$. The number 120 is between the perfect cubes 64 and 125. Since $\sqrt{64}$ = 4 and $\sqrt{125}$ = 5, and 120 is much closer to 125 than 64, = $\sqrt[3]{120}$ is just to the left of 5 on the number line.*

- How do you know which power of 10 to multiply by when converting a repeating decimal to a fraction? *Use an example in the explanation.*
  - *Multiply by the power of 10 that makes the digits to the right of the decimal point the same as those in the number being converted. For example, when converting $2.\overline{09}$ to a decimal, the repeating number is 2.090909..., and the first equation is x = 2.090909.... So multiply by a power of 10 so that in the second equation 090909... will also be to the right of the decimal point. The number to multiply by is 100 so you will have 100x = 209.090909....*

- How do you know which values to substitute into the Pythagorean relationship?
  - *In the Pythagorean relationship* $a^2 + b^2 = c^2$*, a and b are always the length of the legs of the right triangle and c is always the length of the hypotenuse. Either leg can be substituted for a and the other for b, but c must be the hypotenuse.*

- Does the Pythagorean relationship work for all triangles?
  - *The Pythagorean relationship only works for right triangles, not all triangles. This relationship can be used to determine whether a triangle is a right triangle.*

- What type of real-world problems can you solve using the Pythagorean Theorem?
  - *Situations that involve side lengths of right triangles, or diagonals of objects shaped like a rectangle are some of the real-world problems that can be solved using the Pythagorean Theorem.*

Amplify Math

Grado 8, Unidad 7 — Irracionales y el teorema de Pitágoras

Apoyo para cuidadores/as, Unidad 7

Vista general de la unidad + Conexiones narrativas

En esta unidad, los estudiantes van a usar su comprensión de los números racionales, que se pueden expresar en forma de razón, para aprender y aproximar los números irracionales. Puede que no sea una sorpresa que alguna vez esta creencia fue desafiada por la idea de que no todos los números pueden expresarse como una proporción. Los estudiantes van a explorar una prueba geométrica del "teorema más probado de todos los tiempos", el Teorema de Pitágoras. Esta prueba consiste en descomponer y reorganizar dos cuadrados. Luego van a aplicar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas en dos y tres dimensiones.

Aprendizaje previo	Aprendizaje actual	Aprendizaje futuro
• Elevar un número al cuadrado • Convertir fracciones a decimales usando divisiones largas • Operaciones con números racionales	• Estimar raíces cuadradas y raíces cúbicas • Aproximar números irracionales • Comprender y usar el Teorema de Pitágoras	• Exponentes con fracciones • Resolver triángulos rectángulos • Números imaginarios

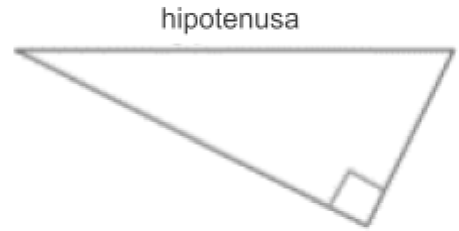
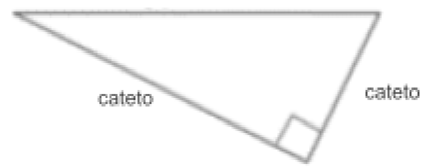
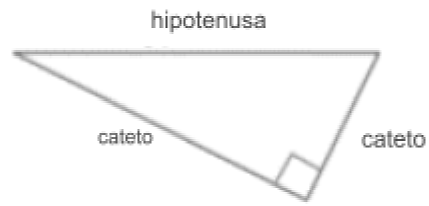
Ideas clave

- La longitud del lado de un cuadrado es la *raíz cuadrada* de su área; la longitud del lado de un cubo es la *raíz cúbica* de su volumen.
- Todos los números que no se pueden escribir como fracciones (razones de dos enteros) son irracionales.
- Los *números racionales* se pueden utilizar para aproximar *números irracionales*.
- La longitud al cuadrado de la *hipotenusa* de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los dos *catetos*.

- Si se conocen las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede usar el *Teorema de Pitágoras* para determinar la longitud del tercer lado.

Vocabulario

cuadrado perfecto	Un número que es el cuadrado de un número entero	Ejemplo: 16 es un cuadrado perfecto porque $16 = 4^2$.
raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número positivo *p* es una solución positiva a la ecuación de la forma $x^2 = p$. La raíz cuadrada de *p* se escribe como $\sqrt{p}$	Ejemplo: $4^2 = 16$, entonces $\sqrt{16} = 4$.
raíz cúbica	La raíz cúbica de un número positivo *p* es una solución positiva a la ecuación de la forma $x^3 = p$. La raíz cuadrada de *p* se escribe como $\sqrt[3]{p}$	Ejemplo: $2^3 = 8$, entonces $\sqrt[3]{8} = 2$.
cubo perfecto	Un número que es el cubo de un número entero	Ejemplo: 8 es un cubo perfecto porque $8 = 2^3$.
número irracional	Un número que no se puede escribir como una fracción.	Ejemplos: $\sqrt{2}$ y π
número racional	Un número que se puede escribir como una fracción positiva o negativa	Ejemplos: $-\frac{1}{2}$, 5, y $\sqrt{16}$
notación de barras	Notación que indica la parte repetida de un número decimal periódico	Ejemplo: $0.666666... = 0.\overline{6}$
decimal periódico	Un número decimal en el que hay una secuencia de dígitos que se repiten sin fin	Ejemplo: 0.81818181...
decimal exacto	Un número decimal que tiene fin	Ejemplo: 1.25

hipotenusa	En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto.	
catetos	Los dos lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto	
Teorema de Pitágoras	El teorema que establece que para cualquier triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.	 $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$
Terna pitagórica	Tres enteros positivos a, b y c, tales como $a^2 + b^2 = c$	Ejemplo: 3, 4, y 5 representan una terna pitagórica donde $3^2 + 4^2 = 5^{2+.}$

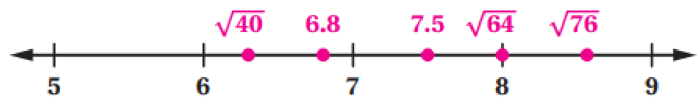
Problemas de ejemplo + Temas de discusión

Subunidad 1

Problema	Solución de ejemplo
Lección 4 Traza y etiqueta el valor aproximado de cada número en la recta numérica. 6.8 $\sqrt{76}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt{64}$ 7.5 	6.8 es ligeramente mayor que 6.75, por lo que está justo a la derecha de $6\frac{3}{4}$ en la recta numérica. El número irracional $\sqrt{76}$ está entre los números racionales $\sqrt{64} = 8$ y $\sqrt{81} = 9$. Dado que $8.5^2 = 72.25$, $\sqrt{76}$ está justo a la derecha de 8.5 en la recta numérica. El número irracional $\sqrt{40}$ está entre los números racionales $\sqrt{36} = 6$ y $\sqrt{49} = 7$. Dado que $6.5^2 = 42.25$, 40 está justo a la izquierda de 6.5 en la recta numérica.

<table>
<tr><td></td><td>$\sqrt{64} = 8$, entonces $\sqrt{64}$ es un número racional y está ubicado en 8 en la recta numérica.

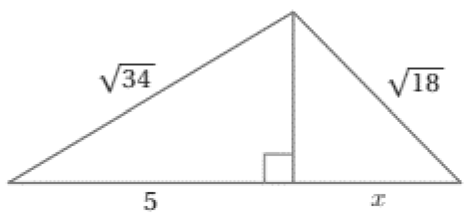
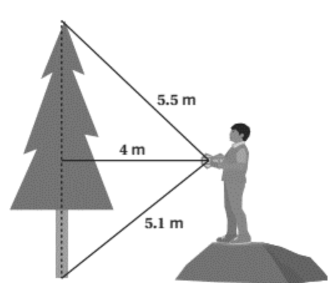
7.5 está a medio camino entre 7 y 8 en la recta numérica.

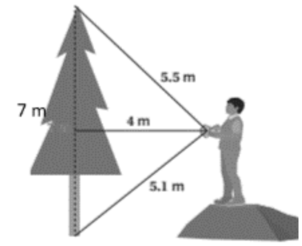

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comente esta pregunta con su estudiante:
• ¿Dónde está $\sqrt{24}$ ubicado en una recta numérica? ¿Cómo lo sabes?</td></tr>
<tr><td>Lección 6
Noah dice que la solución a la ecuación $x^3 = 120$ es racional. ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo con Noah? Explica tu razonamiento.</td><td>El número 120 no es un cubo perfecto, por lo que no existe un número racional que se pueda multiplicar por sí mismo tres veces para dar 120. No estoy de acuerdo con Noah. La solución es $x = \sqrt[3]{120}$ y 120 no es un cubo perfecto, entonces la solución es un número irracional.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comente esta pregunta con su estudiante:
• Explica dónde estaría la solución de $x^3 = 120$ en una recta numérica.</td></tr>
<tr><td>Lección 8
Escribe 0.7 y $0.\overline{7}$ como fracciones.</td><td>Para escribir un número decimal exacto como una fracción, usa el número de dígitos a la derecha del punto decimal para determinar la potencia de 10 en el denominador. Hay un dígito a la derecha del decimal en 0.7, por lo que el denominador de la fracción es $10^1 = 10$. Los dígitos a la derecha del decimal van en el numerador.
0.7 = $\frac{7}{10}$

Para escribir un decimal periódico como una fracción, escribe los dígitos usando notación de barras con repetición.
$0.\overline{7} = 0.7777...$
Haz que x represente este número: $x = 0.7777...$
Multiplica ambos lados de la ecuación por una potencia de 10 de modo que los dígitos a la derecha del punto decimal sean iguales.
Resta las dos ecuaciones.
$10x = 7.7777... \quad - x = 0.7777...$
$9x = 7$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Resuelve por x.
$x = \frac{7}{9}$
$0.\overline{7} = \frac{7}{9}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comente esta pregunta con su estudiante:
● ¿Cómo sabes por qué potencia de 10 multiplicar al convertir un decimal periódico en una fracción? Usa un ejemplo en la explicación.</td></tr>
</table>

Subunidad 2

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Solución de ejemplo</th></tr>
<tr><td>Lección 11
Determina el valor de x en la figura que se presenta. Muestra tu razonamiento.

</td><td>La relación entre los lados de un triángulo rectángulo es $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.
Usando el triángulo rectángulo de la izquierda, haz que l represente el cateto sin etiqueta, el otro cateto es 5 y la hipotenusa es $\sqrt{34}$.
$\boldsymbol{l^2 + 5^2 = (\sqrt{34})^2}$
$\boldsymbol{l^2 + 25 = 34}$
$\boldsymbol{l^2 = 9}$
$\boldsymbol{l = 3}$
Usando el triángulo rectángulo a la derecha, el cateto sin etiquetar resultó ser 3, el otro cateto es x, y la hipotenusa es $\sqrt{18}$.
$\boldsymbol{x^2 + 3^2 = (\sqrt{18})^2}$
$\boldsymbol{x^2 + 9 = 18}$
$\boldsymbol{x^2 = 9}$
$\boldsymbol{x = 3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comente estas preguntas con su estudiante:
● ¿Cómo sabes qué valores sustituir en la relación pitagórica?
● ¿La relación de Pitágoras funciona para todos los triángulos?</td></tr>
<tr><td>Lección 15
Un telémetro de láser es una herramienta usada para medir distancias. Al apuntar el láser a un objeto, la herramienta te puede decir la distancia

</td><td>Hay dos triángulos rectángulos en el diagrama y dos catetos en los dos triángulos se combinan para formar la altura del árbol. Las longitudes de estos catetos se pueden encontrar usando el Teorema de Pitágoras. La relación entre los lados de cada triángulo rectángulo es $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.</td></tr>
</table>

desde la herramienta hasta el objeto a lo largo de la línea por la que estás apuntando. Han mide un árbol desde una colina. ¿Cuál es la altura del árbol? Etiqueta la medida en el diagrama.	 Usando el triángulo rectángulo en la parte superior, haz que x represente el cateto desconocido, el otro cateto es 4m, y la hipotenusa es 5.5 m. $4^2 + x^2 = 5.5^2$ $16 + x^2 = 30.25$ $x^2 = 14.25$ $x = \sqrt{14.25} \approx 3.8$ Usando el triángulo rectángulo en la parte inferior, haz que x represente el cateto desconocido, el otro cateto es 4m, y la hipotenusa es 5.1 m. $4^2 + x^2 = 5.1^2$ $16 + x^2 = 26.01$ $x^2 = 10.01$ $x = \sqrt{10.01} \approx 3.2$ El total es 3.8 + 3.2 = 7. **La altura del árbol es aproximadamente de 7 m.**

Comente esta pregunta con su estudiante:

- ¿Qué tipo de problemas del mundo real puedes resolver usando el Teorema de Pitágoras?

Respuestas de ejemplo a las preguntas de discusión

Puede haber varias respuestas.

- ¿Dónde está $\sqrt{24}$ ubicado en una recta numérica? ¿Cómo lo sabes?
  - *El número irracional $\sqrt{24}$ está ubicado justo a la izquierda de 5 en la recta numérica dado que 24 es solo un poco menos que 25 y $\sqrt{25} = 5$.*

- Explica dónde estaría la solución de $x^3 = 120$ en una recta numérica.
  - *La solución para $x^3 = 120$ es $x = \sqrt[3]{120}$. El número 120 está entre los cubos perfectos 64 y 125. Como $\sqrt{64} = 4$ y $\sqrt{125} = 5$, y 120 está mucho más cerca de 125 que de 64, = $\sqrt[3]{120}$ está justo a la izquierda de 5 en la recta numérica.*

- ¿Cómo sabes por qué potencia de 10 multiplicar al convertir un decimal periódico en una fracción? *Usa un ejemplo en la explicación.*
  - *Multiply Multiplicas por la potencia de 10 que hace que los dígitos a la derecha del punto decimal sean los mismos que los del número que está siendo convertido. Por ejemplo, al convertir $2.\overline{09}$ a número decimal, el número repetido es 2,090909... y la primera ecuación es x = 2,090909.... Entonces multiplicas por una potencia de 10 para que en la segunda ecuación 090909... también esté a la derecha del punto decimal. El número por el que hay que multiplicar es 100, así que tendrás 100x = 209,090909....*

- ¿Cómo sabes qué valores sustituir en la relación pitagórica?
  - *En la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, a y b son siempre la longitud de los catetos del triángulo rectángulo y c es siempre la longitud de la hipotenusa. Cualquier cateto puede sustituirse por a y el otro por b, pero c debe ser la hipotenusa.*

- ¿La relación de Pitágoras funciona para todos los triángulos?
  - *La relación de Pitágoras solo funciona para triángulos rectángulos, no para todos los triángulos. Esta relación se puede usar para determinar si un triángulo es un triángulo rectángulo.*

- ¿Qué tipo de problemas del mundo real puedes resolver usando el Teorema de Pitágoras?
  - *Las situaciones que involucran las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos o las diagonales de los objetos con forma de rectángulo son algunos de los problemas del mundo real que se pueden resolver usando el Teorema de Pitágoras.*